SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Angelo Cavallucci

ALCUNI TIPI DI PROBLEMI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI CON SOLUZIONI LIPSCHITZIANE

12 Maggio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati su esistenza e regolaritá nella classe delle funzioni lipschitziane per un problema del calcolo delle variazioni, dovuti a Ambrosio,Ascenzi, Buttazzo, Clarke e Loewen

Abstract . We present some recent results on Lipschitz regularity and existence for a problem in the calculus of variations, obtained by Ambrosio,Ascenzi, Buttazzo, Clarke and Loewen

ALCUNI TIPI DI PROBLEMI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI CON SOLUZIONI LIPSCHITZIANE

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \Lambda(x) := \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \longrightarrow \min \\ x(.) \in W^{1,1}(a, b; R^n), \\ x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta, \\ x(t) \in C \ \text{ per } \ a \le t \le b, \\ \dot{x}(t) \in K\ q.d. \end{cases}$$

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di regolaritá e di esistenza nell'ambito delle funzioni lipschitziane, dovuti a Ambrosio, Ascenzi e Buttazzo [1], a Clarke [2] e a Clarke e Loewen [5]. In tutto il seguito la funzione L, del tipo

$$[a, b] \times C \times R^n \ni (t, x, u) \longrightarrow L(t, x, u) \in [0, +\infty],$$

con C chiuso in R^n, sará sempre convessa e inferiormente semicontinua (l.s.c.) rispetto alla variabile u.

Avremo anche occasione di considerare la seguente condizione su L

(H1) Esiste una funzione inferiormente limitata $\theta : [0, +\infty[\longrightarrow R$ tale che

$$L(t, x, u) \ \ge\ \theta(|u|) \ \text{ per ogni t,x,u,}$$

$$\frac{\theta(r)}{r} \longrightarrow +\infty \ \text{ per } r \to +\infty.$$

Ricordiamo alcune definizioni (cfr.[3],[6],[7]). Per la funzione

$$f : R^n \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

poniamo

$$dom f = \{x \in R^n |\ f(x) \ < \ +\infty\},$$

se f é convessa e $f(x) < +\infty$ poniamo

$$\partial f(x) = \{p \in R^n | \forall y \in R^n : f(y) \ \ge\ f(x) + p(y - x)\},$$

se $f(x) < \infty$ e f é semicontinua inferiormente poniamo

$$\partial^\pi f(x) = \{p \in R^n |\liminf_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)-p(y-x)}{|y-x|^2} > -\infty\},$$

se f é localmente lipschitziana poniamo

$$\partial f(x) = co\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i)| \lim_{i\to\infty} x_i = x\}$$

Poniamo anche per $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{1,p}(a,b;R^n) = \{[a,b] \ni t \to c + \int_a^t v(s)\,ds\,|c \in R^n,\ v \in L^p(a,b;R^n)\}$$

e indichiamo con $Sol(P)$ l'insieme delle $x(.) \in W^{1,1}(a,b;R^n)$ che risolvono il problema (P).

In [1] é provato il seguente

TEOREMA 1. *Supponiamo $C = R^n = K$, L indipendente da t e boreliana. Sia $z(.) \in W^{1,1,}(a,b;R^n)$ tale che, per qualche $\delta > 0$,*

$$\left.\begin{array}{r} \phi \in W^{1,1}(a,b;R^n),\ \phi(0) = 0 = \phi(1) \\ \|\phi, W^{1,1}\| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \Lambda(z) \leq \Lambda(z+\phi).$$

Allora si ha

I) Se per quasi ogni t riesce

$$\dot z(t) \in int(domL(z(t),.)),$$

allora esistono $c \in R$ e $p : [a,b] \to R^n$ misurabile tali che , per quasi ogni t,

$$p(t) \in \partial_u L(z(t),\dot z(t)),$$

$$c = L(z(t),\dot z(t)) - p(t)\dot z(t).$$

II) Se inoltre L verifica la condizione (H1) e la seguente

$$\forall r > 0, \exists M_r > 0 : \sup\{L(x,u)||x| \leq r,\ |u| \leq M_r\} < \infty$$

allora $z(.)$ é lipschitziana.

Questo risultato ha motivato il lavoro [4], nel quale viene utilizzato un nuovo "metodo indiretto" per ottenere esistenza e regolaritá per problemi di tipo (P).

Supponiamo C chiuso e K = cono convesso chiuso in R^n (con vertice in 0). Poniamo

$$\Gamma = \{x(.) \in W^{1,1}(a,b;R^n)\,|x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta,\ \dot x(t) \in K\ q.d.\},$$

suponiamo che esista $\bar{x}(.)$ tale che

$$\bar{x}(.) \in \Gamma \cap W^{1,\infty}(a,b;R^n),\ \Lambda(\bar{x}) < \infty$$

e poniamo

$$\Gamma(\bar{x}) = \{x(.) \in \Gamma\ |\Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x})\}.$$

Poniamo anche

$$\lambda'(r) = \inf\{L(t,x,u) - pu\,|p \in \partial_u L(t,x,u), a \leq t \leq b, x \in C, u \in K, |u| < r\},\ r > 0,$$

$$\lambda''(r) = \sup\{L(t,x,u) - pu\,|p \in \partial_u L(t,x,u), a \leq t \leq b, x \in C, u \in K, |u| > r\},\ r > 0,$$

$$\lambda''_{-1}(s) = \sup[\{r > 0\,|\lambda''(r) \geq s\} \cup \{0\}],\ s \in R.$$

Allora le funzioni $\lambda'(.)$, $\lambda''(.)$, $\lambda''_{-1}(.)$ sono monotone decrescenti e si ha

$$\lambda''_{-1}(t) = +\infty \Longleftrightarrow t \leq \lambda''(\infty)$$

Fra i risultati principali di [4] figura il seguente

TEOREMA 2. *Supponiamo $L(t,.,.)$ inferiormente semicontinua e $domL(t,x,.)$ aperto e non vuoto per ogni t,x,u. Supponiamo inoltre che L verifichi le condizioni (H2) e (H3) seguenti*

(H2) Se $L(\bar{t},x,u) < \infty$, allora $L(.,x,u)$ é lipschitziana e si ha, per certe costanti $K_i \geq 0$,

$$|D_t L(t,x,u)| \leq K_0 L(t,x,u) + K_1$$

per quasi ogni t.

(H3) Esiste $k > 0$ tale che

i) $\mu(\{t \in [a,b]\,||\dot{x}(t)| < k\}) > 0,\ \forall x(.) \in \Gamma(\bar{x})$,

ii) $\lambda''(\infty) + K_O\Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a)$.

Allora si ha

$$\emptyset \neq Sol(P) \subset W^{1,\infty}(a,b;R^n)$$

e per ogni soluzione $z(.)$ del problema (P) esistono $c \in R$, $p : [a,b] \longrightarrow R^n$ misurabile e $\xi \in L^1(a,b)$ tali che, per quasi ogni t,

$$p(t) \in \partial_u L(t,z(t),\dot{z}(t)),$$

$$\xi(t) \in (\partial_t L)(t,z(t),\dot{z}(t)),$$

$$L(t,z(t),\dot{z}(t)) - p(t)\dot{z}(t) = c + \int_a^t \xi(s)\,ds,$$

$$\|\dot{z}\|_\infty \leq \lambda''_{-1}[\lambda'(k) - K_0 - K_1(b-a)] < \infty$$

Indichiamo alcuni esempi di applicazione del Teorema 2.

E1) Supponiamo L continua e verificante tutte le ipotesi del Teorema 2 tranne (H3), che viene sostituita da (H1). Allora si puó supporre C compatto e si ha

$$\lambda''(\infty) = -\infty < \lambda'(r), \forall r > 0$$

ed é verificata la condizione (H3) con $K = R^n$.

E2) $L(x,u) = g(x)\sqrt{1+|u|^2}$, $x \in C$, $u \in R^n = K$,

con $0 < m \leq g(.)$ $l.s.c.$ e localmente limitata su C.
Ancora si puó supporre C compatto e $K_i = 0$ e si ottiene

$$\lambda''(\infty) = 0 < \frac{m}{\sqrt{1+k^2}} \leq \lambda'(k), \forall k > 0.$$

E3) $L(x,u) = e^{-u_1} + u_2^2 + u_1 g(x_1,x_2)$, $x \in C$, $K = [0,+\infty[^2$,

con g continua, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = (0,0)$, $\beta = (\beta_1,\beta_2)$,

con $\beta_i > 0$.
Allora si ha

$$\lambda''(\infty) = 0, \ \lambda'(k) \geq e^{-k}(1+k) - k^2$$

e la condizione i) di (H3) vale per ogni $k > \beta_1 + \beta_2$ abbastanza piccolo.

E4) $L(t,x,u) = \phi(t)\sqrt{1+u^2}$, $0 \leq t \leq 1$, $K = R$,

$$0 < m \leq \phi(t) \text{ e } \phi \text{ di classe } C^1, \ a = 0, \ b = 1, \ \alpha = 0, \ \beta > 0.$$

Si verifica che il Teorema 2 é applicabile se

$$\max\{|\dot{\phi}(t)| \,|0 \leq t \leq 1\}$$

é abbastanza piccolo.

Indichiamo i punti fondamentali della dimostrazione del Teorema 2, seguendo [4].
Poniamo

$$T = \{\theta : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\,|\theta \text{ é di classe } C^1, \text{ crescente, convessa, } \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty\}$$

e ricordiamo ([2],Theor.10.3.i) che $E \subset L^1(a,b;R^n)$ é debolmente relativamente compatto se e solo se esiste $\theta \in T$ tale che

$$\sup_{f\in E} \int_a^b \theta(|f(t)|)\,dt < \infty.$$

Se $\theta \in T$, poniamo

$$\Lambda_\theta(x) = \int_a^b \theta(|\dot{x}(t)|)\,dt, \quad x(.) \in W^{1,1}(a,b;R^n),$$

$$\Gamma_\theta(\bar{x}) = \{x(.) \in \Gamma(\bar{x})\,|\Lambda_\theta(x) < \infty\},$$

$$V_\theta(\alpha) = \inf\{\Lambda(x)\,|x(.) \in \Gamma,\ \Lambda_\theta(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in R,$$

con la convenzione: $\inf \emptyset = +\infty$.

Allora si ha quanto segue

I) V_θ é decrescente, semicontinua inferiormente e $V_\theta(\alpha) < \infty$ per ogni

$$\alpha \geq (b-a)\theta(\|\dot{\bar{x}}\|_\infty) = \bar{\alpha}.$$

Se $V_\theta(\alpha) < \infty$, allora si ha $V_\theta(\alpha) =$ minimo di $\Lambda(x)$.

Questo si prova con i metodi classici del calcolo delle variazioni ([2],[3]).

II) Esiste $\alpha_0 \geq \bar{\alpha}$ tale che $V_\theta(\alpha_0) < \infty$ e

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) \subset \{0\} \text{ per ogni } \alpha \geq \alpha_0.$$

Questo si ottiene dalla successiva Proposizione 1 utilizzando la condizione (H3).

III) Si ha $V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0)$ per $\alpha \geq \alpha_0$.

Questo segue da II) e dalla Propos.6.1 di [4] oppure da [6].

IV) Supposto $V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(z_0)$, $\Lambda_\theta(z_0) \leq \alpha_0$, allora si ha

$$\Lambda(z_0) = \min\{\Lambda(x) \mid x(.) \in \Gamma, \Lambda_\theta(x) < \infty\}$$

e $z_0(.) \in W^{1,\infty}(a,b;R^n)$.

Questo segue da III) e dalla Proposizione 1.

V) Per ogni altra $\tilde{\theta} \in T$ si ha $\Lambda_{\tilde{\theta}}(z_0) < \infty$ e

$$\Lambda(z_0) = \min\{\Lambda(x)\,|x(.) \in \Gamma, \Gamma_{\tilde{\theta}}(x) < \infty\}.$$

VI) Per ogni $x(.) \in \Gamma$ esiste $\theta_x \in T$ tale che $\Lambda_{\theta_x}(x) < \infty$ e quindi segue da V)

$$\Lambda(x) \geq \min\{\Lambda(y)\,|y(.) \in \Gamma,\ \Lambda_{\theta_x}(y) < \infty\} = \Lambda(z_0).$$

Dunque $z_0(.)$ risolve il problema (P), é lipschitziana e dalla Proposizione 1 segue che verifica anche le altre condizioni richieste.

PROPOSIZIONE 1. *Supponiamo $L(t,.,.)$ boreliana per ogni t e supponiamo soddisfatta la condizione (H2). Sia $\theta \in T$, $r \geq 0$, $\delta > 0$ e sia $z(.) \in \Gamma$ tale che $\Lambda(z) < \infty$, $\Lambda_\theta(z) < \infty$, $\dot{z}(t) \in$ int (dom $L(t, z(t), .)$) per quasi ogni t e*

$$\begin{cases} \min[\Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) + \sigma[\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)]^2 = \Lambda(z) + r\Lambda_\theta(z) \\ x(.) \in \Gamma,\ \Lambda_\theta(x) < \infty, \\ |\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)| \leq \delta \end{cases}$$

Allora esistono $c \in R$ e le funzioni $\xi(.) \in L^1(a,b)$ e $p(.) : [a,b] \longrightarrow R^n$ misurabile tali che, per quasi ogni t,

$$\xi(t) \in (\partial_t L)(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$p(t) \in \partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$L(t, z(t), \dot{z}(t)) - \dot{z}(t)p(t) + r\theta(|\dot{z}(t)|) - r|\dot{z}(t)|\dot{\theta}(|\dot{z}(t)|) = c + \int_0^t \xi(s)\, ds$$

Per la dimostrazione poniamo

$$L_1(t, x, u) = L(t, x, u) + r\theta(|u|).$$

Col cambiamento di variabile di integrazione

$$t = \psi(\tau), \quad \text{con } \psi : [a,b] \xrightarrow[1-1]{\text{su}} [a,b]$$

crescente e lipschitziana si ha

$$I = \int_a^b L_1(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \int_a^b L_1(\psi(\tau), x(\psi(\tau), \dot{x}(\psi(\tau))\dot{\psi}(\tau)\, d\tau.$$

Se $x(\psi(\tau)) = z(\tau)$ per $a \leq \tau \leq b$, allora

$$I = \int_a^b L_1(\psi(\tau), z(\tau), \frac{\dot{z}(\tau)}{\dot{\psi}(\tau)})\dot{\psi}(\tau)\, d\tau.$$

Possiamo ottenere una classe di funzioni $\psi(.)$ come sopra ponendo

$$\psi(\tau) = \tau + \int_a^\tau u(\sigma)\, d\sigma$$

con

$$u(.) \in L^1(a,b),\ |u(\sigma)| \leq \epsilon < 1,\ \int_a^b u(\sigma)\, d\sigma = 0, \quad \epsilon > 0.$$

Affinché la funzione

$$x(t) = z(\psi^{-1}(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

sia ammissibile per il problema che figura nell'enunciato basta prendere $u(.)$ tale che

$$|u(t)| \leq \gamma(t) \leq \epsilon \text{ per } a \leq t \leq b,$$

con $0 < \gamma(t) \leq \epsilon$, $\gamma(.)$ misurabile e tale che per quasi ogni t

$$|u| \leq \gamma(t) \Longrightarrow \begin{cases} L(t, z(t), \dfrac{\dot{z}(t)}{1+u}) \in R, \\ |\theta(\dfrac{|\dot{z}(t)|}{1+u})(1+u) - \theta(|\dot{z}(t)|)| \leq \dfrac{\delta}{b-a} \end{cases}.$$

Per tale funzione $x(.)$ si ha

$$\int_a^b L_1(t, z(t), \dot{z}(t))\, dt = \Lambda(z) + r\Lambda_\theta(z) \leq \Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) + \sigma\,[\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)]^2 =$$

$$= \int_a^b L_1(\psi(\tau), z(\tau), \frac{\dot{z}(\tau)}{1+u(\tau)})(1+u(\tau))\, d\tau +$$

$$+\sigma \left(\int_a^b \theta(\frac{|\dot{z}(\tau)|}{1+u(\tau)})(1+u(\tau)) - \int_a^b \theta(|\dot{z}(\tau)|)\, d\tau \right)^2.$$

Ne segue che la terna di funzioni

$$\begin{cases} (\tilde{\phi}(t), \tilde{\psi}(t)) = \left(\int_a^t \theta(|\dot{z}(s)|)\, ds, t\right), \ a \leq t \leq b, \\ \tilde{u}(t) = 0, \ a \leq t \leq b, \end{cases}$$

é soluzione del problema di controllo

$$\begin{cases} \sigma\, (\phi(b) - \Lambda_\theta(z))^2 + \int_a^b L_1(\psi(t), z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u(t)})(1+u(t))\, dt \to \min \\ \dot{\phi}(t) = \theta(|\frac{\dot{z}(t)}{1+u(t)}|)(1+u(t)), \ \phi(a) = 0, \\ \dot{\psi}(t) = 1 + u(t), \ \psi(a) = a, \ \psi(b) = b, \\ |u(t)| \leq \gamma(t), \end{cases}$$

al quale si applica il Teorema 5.2.1 di [3] e si ottengono $\lambda \in \{0, 1\}$ e $p(.)$, $q(.) \in W^{1,1}(a, b; R^n)$ tali che, per quasi ogni t,

$$0 < \lambda + \|p\|_\infty + \|q\|_\infty,$$

$$\dot{p}(t) = 0, \ \dot{q}(t) \in \lambda(\partial_t L_1)(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$p(b) = 0 \Rightarrow p(t) = 0 \ \text{ per ogni } t,$$

$$q(t) - \lambda L_1(t, z(t), \dot{z}(t)) \geq q(t)(1+u) - \lambda L_1(t, z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u})(1+u)$$

per ogni u tale che $|u| \geq \gamma(t)$.

Se $\lambda = 0$, allora si ha $0 \geq \max\{q(t)u \ ||u| \leq \gamma(t)\} = \gamma(t)|q(t)|$ e quindi $q(t) = 0$, e ció é escluso.

Dunque deve essere $\lambda = 1$ e quindi si ha per $|u| \leq \gamma(t)$

$$L(t, z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u})(1+u) + r\theta\left(\frac{|\dot{z}(t)|}{1+u}\right)(1+u) - L(t, z(t), \dot{z}(t)) - r\theta(|\dot{z}(t)|) \geq q(t)u$$

e di qui segue

$$L(t,z(t),\dot z(t)) - \dot z(t)p(t) + r\theta(|\dot z(t)|) - r|\dot z(t)|\dot\theta(|\dot z(t)|) \in -\dot z(t)\partial_u L(t,z(t),\dot z(t))$$

Ora si puó prendere una selezione misurabile

$$p(t) \in \dot z(t)\partial_u L(t,z(t),\dot z(t)) \quad \text{q.d.}$$

tale che

$$L(t,z(t),\dot z(t)) - \dot z(t)p(t) + r\theta(|\dot z(t)|) - r|\dot z(t)|\dot\theta(|\dot z(t)|) =$$

$$= q(t) = q(0) + \int_a^t \dot q(s)\,ds.$$

Se si pone $c = q(0)$, $\xi(s) = \dot q(s)$, questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Vediamo ora come si puó provare l'affermazione al punto II) di pag. 5. Dalla decrescenza di V_θ segue $V_\theta(\alpha) < \infty$ per $\alpha \geq \bar\alpha$ e

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) \subset]-\infty, 0].$$

Se l'affermazione al punto II) é falsa, per ogni $\alpha_0 \geq \bar\alpha$ esistono $\alpha \geq \alpha_O$ e $p < 0$ tali che $p \in \partial^\pi V_\theta(\alpha)$. Poniamo $r = -p > 0$. Dalla definizione di $\partial^\pi V_\theta(\alpha)$ segue che esistono $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ tali che, per ogni $\alpha' \in R$,

(i) $\quad |\alpha - \alpha'| \leq \delta \Rightarrow V_\theta(\alpha') \geq V_\theta(\alpha) - r(\alpha' - \alpha) - \sigma|\alpha' - \alpha|^2.$

Sia $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z)$, $\Lambda_\theta(z) \leq \alpha$.
Deve essere $\Lambda_\theta(z) = \alpha$, poiché da $\Lambda_\theta(z) < \alpha$ segue, per ogni $\epsilon > 0$ tale che

$$\Lambda_\theta(z) \leq \alpha - \epsilon < \alpha,$$

$$\Lambda(z) \geq V_\theta(\Lambda_\theta(z)) \geq V_\theta(\alpha - \epsilon) \geq V_\theta(\alpha) = \Lambda(z),$$

e quindi

$$0 = V_\theta(\alpha - \epsilon) - V_\theta(\alpha) \geq r\epsilon - \sigma\epsilon^2 \Rightarrow r \leq 0.$$

Se poniamo nella formula (i) $\alpha' = \Lambda_\theta(x)$ con $x \in \Gamma$ tale che

$$|\Lambda(x) - \Lambda(z)| \leq \delta,$$

otteniamo

$$\Lambda(x) \geq V_\theta(\Lambda_\theta(x)) \geq V_\theta(\alpha) - r[\Lambda(x) - \Lambda(z)] - \sigma[\Lambda(x) - \Lambda(z)]^2.$$

Ora possiamo applicare la Proposizione 1 e ottenere $c \in R$, $\xi(.) \in L^1(a,b)$, $p(.) \in W^{1,1}(a,b;R^n)$ tali che

(ii) $\quad \xi(t) \in (\partial_t L)(t,z(t),\dot z(t)),\ p(t) \in \partial_u L(t,z(t),\dot z(t)),$

(iii) $\quad L(t,z(t),\dot z(t)) - \dot z(t)p(t) + r\theta(|\dot z(t)|) - r|\dot z(t)|\dot\theta(|\dot z(t)|) - \int_0^t \xi(s)\,ds = c$

per quasi ogni $t \in [a, b]$.

Dalla condizione i) di (H3) segue che esiste $t' \in [a, b]$ che verifica le condizioni (ii), (iii) e la seguente

$$|\dot{z}(t')| < k.$$

Ne segue

$$c \geq \lambda'(k) + r \inf_{|u|<k} [\theta(|u|) - |u|\dot{\theta}(|u|)] - \max_t \int_a^t \xi(s)\, ds.$$

Se supponiamo

$$\mu(\{t \in [a, b] \, | \, |\dot{z}(t)| > M\}), \; M > 0,$$

esiste $t'' \in [a, b]$ per il quale valgono le condizioni (ii), (iii) e la seguente

$$|\dot{z}(t'')| > M.$$

Ne segue

$$c \leq \lambda''(M) + \sup_{|u|>M} [\theta(|u|) - |u|\dot{\theta}(|u|)] - \min_t \int_a^t \xi(s)\, ds.$$

Poniamo

$$\phi(t) = \theta(t) - t\dot{\theta}(t),$$

$$\min_{a\leq t\leq b} \int_a^t \xi(s)\, ds = \int_a^{t_0} \xi(s)\, ds,$$

$$\max_{a\leq t\leq b} \int_a^t \xi(s)\, ds = \int_a^{t_1} \xi(s)\, ds.$$

Allora si ha

$$\phi(t) \longrightarrow -\infty \text{ per } t \longrightarrow +\infty,$$

$$\lambda'(k) + r\phi(k) \leq r\phi(M) + \int_{t_0}^{t_1} \xi(s)\, ds + \lambda''(M) \leq r\phi(M) + \int_a^b |\xi(s)|\, ds + \lambda''(M).$$

Si ha poi da (H2)

$$|\xi(s)| \leq K_0 L(s, z(s), \dot{z}(s)) + K_1, \text{ q.d.},$$

$$\int_a^b |\xi(s)|\, ds \leq K_0\Lambda(z) + K_1(b-a) \leq K_0\Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a).$$

Ne segue, ponendo

$$K_2 = K_0\Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a),$$

(iv) $\quad \lambda'(k) + r\phi(k) \leq r\phi(M) + K_2 + \lambda''(M).$

Dalla condizione

$$|\dot{z}(t)| \leq M \text{ q.d.}$$

segue

$$\alpha_0 \leq \alpha = \int_a^b \theta(|\dot{z}(t)|)\, dt \leq \theta(M)(b-a),$$

$$M \geq \theta^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{b-a}\right).$$

Dunque, se poniamo

$$M = M(\alpha_0) = \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{b-a}\right) \underset{\alpha_0 \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

allora $\mu(\{t \in [a,b] \, | |\dot{z}(t)| > M(\alpha_0)\}) > 0$ e possiamo porre $M = M(\alpha_0)$ nella formula (iv) e passare al limite per $\alpha_0 \longrightarrow \infty$ e arrivare all'assurdo

$$R \ni \lambda'(k) + r\phi(k) - \lambda''(\infty) \leq -\infty.$$

Se poniamo $r = 0 = \sigma$ e $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z)$, $\alpha \geq \bar{\alpha}$, e supponiamo

$$\mu(\{t \in [a,b] \, | |\dot{z}(t)| > M\}),\ M > 0,$$

allora quanto detto sopra conduce alla maggiorazione

$$\lambda'(k) \leq \lambda''(M) + K_2$$

e quindi, tenendo conto di (H3),

$$M \leq \lambda''_{-1}[\lambda'(k) - K_2] < \infty.$$

Posto $K_3 = \lambda'(k) - K_2$, ne segue

$$\mu(\{t \in [a,b] \, | |\dot{z}(t)| > M\}) = 0,\ \forall M > \lambda''_{-1}(K3)$$

e quindi $\dot{z}(t) \in L^\infty(a, b, R^n)$ e

$$\|\dot{z}\|_\infty \leq \lambda''_{-1}(K_3).$$

Per esporre il risultato fondamentale di [5] consideriamo le seguenti condizioni sul problema (P).

(H4) $\quad C = \{x \in R^n \, | |x| \leq R\} = C_R,\ o < R < \infty$ e

$$L : [a,b] \times C_R \times R^n \longrightarrow R$$

é localmente lipschitziana.

(H5) $\quad L(t, x, .)$ é convessa e l'insieme

$$W(t,x,p) = \{u \in R^n \, | p \in \partial_u L(t,x,u)\}$$

é limitato, per ogni t, x, p.

Se L verifica le condizioni (H4) e (H5), la funzione $\rho(.)$ data da

$$\rho(s) = \inf\{r \geq 0 \,|\exists t, x, p, u', u'' : u', u'' \in W(t,x,p),\ |u'| \leq r,\ |u''| \geq s\},\ s \geq 0,$$

ha le proprietá

i) $0 \leq \rho(s) \leq s$, $\rho(.)$ é crescente e $\rho(s) \longrightarrow \infty$ per $s \longrightarrow \infty$,

ii) se $L(t,x,.)$ é strettamente convessa per ogni (t,x), allora $\rho(s) = s$ per ogni $s \geq 0$.

Consideriamo il problema

$$\left(P_{R,s}^{t_0,\alpha_0;t_1,\alpha_1}\right) \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt \longrightarrow \min \\ y(.) \in W^{1,1}(a,b;R^n),\ x(t_i) = \alpha_i, \\ |y(t)| < R \text{ per } t_0 \leq t \leq t_1, \\ |\dot{y}(t)| \leq s \text{ q.d.} \end{cases}$$

e poniamo per ogni $s > r > 0$

$$\Delta_R(r,s) = \inf\{t_1 - t_0 \,|a \leq t_0 < t_1 \leq b, \exists x(.) \in Sol\left(P_{R,s}^{t_0,\alpha_0;t_1,\alpha_1}\right) :$$

$$\mu(\{t \in [t_0,t_1] \,||\dot{x}(t)| < r + \epsilon\} > 0 \text{ per ogni } \epsilon > 0,$$

$$\mu(\{t \in [t_0,t_1] \,||\dot{x}(t)| > \rho(s) - \epsilon\}) > 0 \text{ per ogni } \epsilon > 0,$$

$$t_0 < \tau_0 < \tau_1 < t_1 \Rightarrow \|\dot{x}, L^\infty(\tau_0,\tau_1)\| < s\}$$

Se L verifica le condizioni (H4) e (H5) si ha

i) $\Delta_R(r,s)$ é crescente su $\rho^{-1}(]r,+\infty[)$,

ii) $\rho(\rho(s)) > r \Rightarrow \Delta_R(r,s) > 0$.

Ora possiamo enunciare il risultato fondamentale di [5], dato dal seguente teorema

TEOREMA 3. *Supponiamo che siano verificate le condizioni (H4), (H5) e le seguenti*

(H6) Esiste $\bar{\alpha} > 0$ *tale che*

$$L(t,x,u) \geq \bar{\alpha}|u|$$

per ogni t, x, u.

(H7) Esistono $\bar{x}(.) \in \Gamma \cap W^{1,\infty}(a,b;R^n)$ *e* $\alpha \in]0,\bar{\alpha}[$ *tali che*

$$R > \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha} + \min\{|\alpha|,\ |\beta|\}.$$

(H8) Esiste $\bar{s} > 0$ tale che

$$\rho(\bar{s}) > \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha(b-a)} = \bar{r},$$

$$\Delta_R(\bar{r}, \bar{s}) \geq b - a.$$

Allora si ha

$$\emptyset \neq Sol(P) \subset W^{1,\infty}(a, b; R^n)$$

e per ogni soluzione $z(.)$ del problema (P) si ha

$$\max_{a \leq t \leq b} |z(t)| < R.$$

Anche in questo caso per la dimostrazione in [5] viene utilizzato un "metodo indiretto", che consiste nell'applicazione di note condizioni necessarie alle soluzioni di opportune famiglie di problemi ausiliarii di tipo tradizionale. Prima si ottiene l'esistenza di una soluzione $z(.)$ in $W^{1,\infty}$. Successivamente si prova che $z(.)$ é anche soluzione in $W^{1,1}$ e che ogni altra soluzione in $W^{1,1}$ in realtá appartiene a $W^{1,\infty}$.

Terminiamo con due esempi.

E5) Supponiamo soddisfatte le condizioni (H4), (H5) e la seguente

$$\lambda''(\infty) = -\infty.$$

Supponiamo che sia verificata anche una delle condizioni

a) L non dipende da t ;

b) esistono $c > 0$ e $g(.) \in L^1$ tali che, per ogni $t, x, u, (\xi, \eta) \in \partial_{x,u} L(t, x, u)$ si ha

$$|\xi| \leq |\eta| + g(t);$$

c) posto

$$H(t, x, p) = \sup\{pu - L(t, x, u) \; |u \in R^n\},$$

esistono $c > 0$ e $g(.) \in L^1$ tali che

$$|D_t H(t, x, p)| \leq c|H(t, x, p)| + g(t)$$

per ogni (t, x, p) in cui esiste la derivata $D_t H(t, x, p)$.

Allora per ogni $r > 0$ esiste $s_r > r$ tale che

$$\Delta_R(r, s) = +\infty \text{ per } s > s_r.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [5].

E6) Consideriamo la funzione localmente lipschitziana

$$H : R \times R^{2n} \longrightarrow R$$

che verifica le condizioni

i) $H(t,.)$ é convessa e

$$H(t,x) \geq \theta(|x|),$$

con θ convessa e tale che

$$\frac{\theta(r)}{r} \longrightarrow \infty \quad \text{per } r \longrightarrow \infty;$$

ii) esistono le costanti $C_0 > 0$ e $T > 0$ tali che

$$H(t,x) \leq \frac{C_O^2}{2T} + \inf_{r \geq 0} \theta(r) \quad \text{per } |x| \leq C_0, \ 0 \leq t \leq T;$$

iii) esiste una costante $C_1 \geq 0$ tale che

$$|D_t H(t,x)| \leq C_1(1 + |H(t,x,)|)$$

per ogni (t,x) in cui esiste la derivata $D_t H(t,x)$.

Poniamo

$$J = \begin{pmatrix} O - I_n \\ I_n \quad O \end{pmatrix},$$

ove I_n rappresenta la matrice-unitá $n \times n$, e poniamo

$$L(t,x,u) = \frac{1}{2} uJx + \sup_{y \in R^{2n}} [yJu - H(t,y)].$$

Allora il problema (P), con $R = C_0$, $a = 0$, $b = T$, $\alpha = 0 = \beta$, ha una soluzione $z(.) \in W^{1,\infty}$.

Inoltre esiste una costante k tale che, posto

$$v(t) = z(t) + k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

si ha

$$\begin{cases} J\dot{v}(t) \in \partial_x H(t, v(t)) & \text{q.d.} \\ v(0) = v(T) \end{cases}$$

Anche per questo rimandiamo a [5].

BIBLIOGRAFIA

1. L. Ambrosio, O. Ascenzi, G. Buttazzo, *Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), 301–16.
2. L. Cesari, *Optimization-Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.
3. F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley Interscience, New York, 1983.
4. F. H. Clarke, *An indirect method in the calculus of variations*, Trans. A. M. S. **336, 2** (1993), 655–73.
5. F. H. Clarke, P. H. Loewen, *An intermediate existence theory in the calculus of variations*, Annali S. N. Sup. Pisa **(4) 16** (1989), 487–526.
6. F. H. Clarke, M. Redheffer, *The proximal subgradient and constancy*, Canad. Math. Bull. **36, 1** (1993), 30–32.
7. R. T. Rockafellar, *Dualization of subgradient conditions for optimality*, Nonlin. Anal. T. M. Appl. **20, 6** (1993), 627–46.